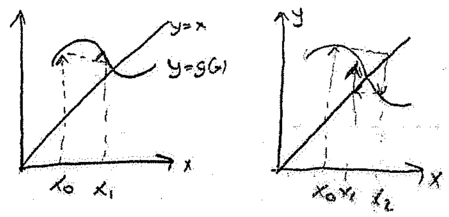
- DENK. VE DENK. TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ -

Doğrusal Olmayan denklemlerin çözümü -

1. Basit İterasyon yöntemi

$f(x)$ fonksiyonunun köklerini bulmak için $f(x)=0$ denkliği $x=g(x)$ durumuna sokulur. $y=x$ doğrusu ile $y=g(x)$ fonksiyonun kesim noktasını bulmaktır.



$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$\vdots$

$x_n = g(x_n)$ elde edilir. Herbir işlemin sonunda yeni bir x_k yaklaşımı elde edilir. Eğer şekildeki gibi $|x_{n+1}-x_n|$ farkı küçülüyorsa çözüm yakınsak olur. İşlemler ε verilen pozitif sayı olmak üzere $|x_{n+1}-x_n| \le \varepsilon$ olana kadar devam eder. Fark büyüyorsa ıraksaktır çözüm var ama yöntem farklı.

ÖRNEK $f(x) = 4.e^{-0,5x} - x$ denkleminin kökünü $x_0=3$ başlangıç değeri için 0.05 mutlak hata ile bulunuz.

$x=g(x)$ şekline sokulur.

$x = 4.e^{-0,5x} = g(x)$

$x_{n+1} = g(x_n) = 4.e^{-0,5x_n}$, $n=0,1,2,3\ldots$ dır.

x	$x_{n+1}=g(x)$	$h=\lvert x_{n+1}-x_n\rvert \overset{?}{\le} \varepsilon_m=0.05$
3	0.89	2.11
0.89	2.56	1.67
2.56	1.1	1.45
$\vdots$	$\vdots$	
1.7	1.7	

25 iterasyondan sonra $\varepsilon=0.05$ hata ile kök $=1.7$ bulunur.

ÖRNEK $f(x) = 4.\ln x - x$ denkleminin kökünü $x_0=3$ başlangıç değeri için 0,05 mutlak hata ile bulunuz.

$g(x) = 4.\ln x$ olur.

1

x_n	$x_{n+1}=g(x_n)$	$h=\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
3	4.39	1.39
4.39	5.92	1.53
5.92	7.11	$\vdots$
7.11	$\vdots$	
$\vdots$		

$x=3$ civarındaki köke yaklaşma yerine ıraksama ortaya çıkar. İterasyonun yakınsak olması için iterasyon yapılan bölgede $|g'(x)|<1$ olmalıdır.

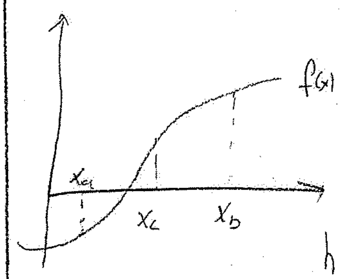
Algoritması :

```
Em=0.05;
x0=3;
h=1;
while(h>Em){
    x1=4.exp(-0.5*x0);
    h=abs(x1-x0);
    x0=x1 }
xk=x1;
```

2. Aralığı ikiye bölme yöntemi

Bu yöntem her zaman yakınsak bir çözüm vermektedir. İki başlangıç noktası seçilir. Bunlar fonksiyonun zıt işaretli değerlerini almalıdır. Fonksiyonun tanımlı olduğu x_a ve x_b aralığında, x_a ve x_b gibi iki başlangıç değeri için $f(x_a)$ ile $f(x_b)$ zıt işaretli olmalı. Böyle bir x_a ve x_b başlangıç noktası da bulunmuşsa kökün x_a ile x_b arasında olacağı açıktır.

$f(x_a).f(x_b)<0$ ise kesin kök var ama yeri belli değil



$x_c = \dfrac{x_a+x_b}{2}$

yani işaretleri zıt daralta daralta gidiyor.

$h = |x_a - x_b| < \varepsilon_m$

ÖRNEK

$f(x) = y = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$

$x = [1,2]$ aralığında kökü var mıdır? Varsa bu kökü, $E_m = 0.06$ mutlak hatayla bulunuz.

$x_1 = 1$ için $y_1 = -20$ $x_2 = 2$ için $y_2 = +46$

$x_a = 1$ için $f(x_a) = f(1) = -20$, $x_b = 2$ için $f(x_b) = +46$

Kök var $f(1) \cdot f(2) < 0$ işaretler farklı

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ için } y_3 = +20,2 \text{ dir}$$

- Bu değer y_1 ile zıt işaretli olduğundan yada x_b ile aynı işaret olduğundan devam edilir

$$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1,25$$

Buna karşılık $y_4 = +1.8$ olur y_4 ile y_1 zıt işaretli olduğundan

$$x_5 = \frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{1+1,25}{2} = 1,125 \text{ için}$$

$y_5 = -8,7$ dir. O halde, y_5 y_4 ile zıt işaretli olduğundan yeni kök

$$x_6 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{1,25 + 1,125}{2} = 1,187$$

0.062

işlemlere $|g(x_n)| \leq 0.06$ olana kadar devam edilir.

- Hocanın

$x_c = \frac{1+2}{2} = 1.5 \Rightarrow f(x_c) = f(1.5) = +20.2$

x_b'nin işaretiyle aynı olduğundan yeni x_b değeri x_c olarak belirlenir. $x_b = x_c$ $h_1 = |1 - 1.5| = 0.5$

$x_c = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$ $f(1.25) = +1.8$

$h_2 = |1 - 1.25| = 0.25$

$x_c = \frac{1+1.25}{2} = 1.125$ $f(x_c) = f(1.125) = -8.7$

x_a'nın işaretiyle aynı olduğundan $x_a = x_c$ dır

$h = |1.125 - 1.25| = 0.125$

$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1.125 + 1.25}{2} = 1.187$ $f(x_c) = f(1.187)$

$h = |x_a - x_b| < E_m = 0.06$ oluncaya kadar devam eder.

CODE

```
xa=1;
xb=2;                   → döngüye girsin diye)
h=10; (h=abs(xa-xb))
ya = xa^4 - 9*xa^3 - 2* ....
yb = xb^4 "  "  "  "  "  "
if(ya*yb) <0 {
  while(h > 0.06) {
    xc = (xa+xb)/2
    yc = xc^4 - 9* ....
    if(ya*yc)>0 { xa = xc} else xb = xc;
    h = abs(xa-xb); }
```

3. Newton-Raphson Yöntemi

x_0 = yaklaşık kök

h = yaklaşım hatası

x_1 = kökün düzeltilmiş hali $x_0 + h$

$f(x_1) = f(x_0 + h) = 0$ olmalıdır. Bunu taylor serisinde açacağız.

$$\underbrace{f(x_0+h)}_{x_1} = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \underbrace{\frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots}_{\text{ihmal}}$$

$f(x_1) \cong f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ terimini alarak hata yapmış sayılmayız x_1 $f(x)$'in kökü olduğundan

$$h = x_1 - x_0 \cong -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$ olur. Buradan yeni kök

$$x_1 = x_0 + h = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Her adımda hesaplanan hata verilen E küçük değilse x_1 değeri yaklaşık kök kabul edilip x_2 hesaplanır.

Genel ifade:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad \boxed{h = |x_{n+1} - x_n|}$$

minimum yapılmak için yeni noktalar.

$$h = \frac{f(x_0)}{tg\theta} = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$ $|h| \to$ küçülmeli

Iraksak durumlarda olabilir.

ÖRNEK

$x^4-3x^3+6x^2-16$ nın $x_0=4$ civarındaki kökünü 0.05 mutlak hata ile bulunuz

$f'(x)=4x^3-9x^2+12x$

Bilinen x_n	Hesaplanan $= x_{n+1}=x_n+h$ (Kitap) $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x)}{f'(x_n)}$	$h=\lvert x_{n+1}-x_n\rvert=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$? $<\varepsilon_m=0.05$
4	3.10	0.9
3,1	2,46	0.64
2,46	2,1	0.36
2,10	2,005	0.095
2,005	1,999	0.006 < 0.05 ✓

$x_k \cong 2.0$

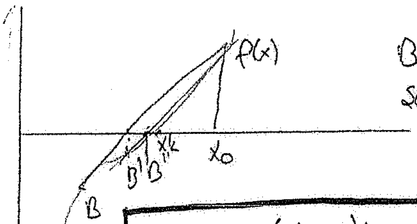
NOT: Sınav 4-5 adımda çıkar. Fazla uzun verse bu yöntem uygun değil. N-R ve Basit iterasyon ucu açık

NOT: Basit iterasyon yavaş (türev) yok, N-R hızlı

4-) Kiriş Yöntemi

Köke yaklaşım hızı büyükken Türevle uğraşmaz.

Fonksiyon (a,b) sürekli olmalı $f(a)*f(b)<0$ olmalıdır



Burada $\overline{AB}$ kirişini şöyle yazabilir.

$$\boxed{x_2=x_0-\frac{(x_1-x_0)\,y_0}{y_1-y_0}}$$

Böylece x_0 ve x_1 gibi başlangıç noktasıyla gerçek kök X_g ye daha yakın bir kökü türevsiz bulabiliriz.

$$x_3=x_0-\frac{(x_2-x_0)}{(y_2-y_0)}\,y_0$$

Genel

$$\boxed{x_{n+1}=x_0-\frac{(x_n-x_0)\,y_0}{(y_n-y_0)}}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x_{n+1}-x_n)\,y_n}{y_{n+1}-y_n}$$

Kitap

Hoca

$$x_{n+1}=x_0-\frac{(x_0-x_n)}{(y_0-y_n)}\cdot y_0$$

$$x_{n+2}=x_0-\frac{(x_0-x_{n+1})}{(y_0-y_{n+1})}\cdot y_0$$

ÖRNEK $f(x)=x^3-20x+16$ nın 3-5 aralığındaki bir kökünü, kiriş yöntemini uygulayarak 0.008 mutlak hata ile bulunuz. $\varepsilon_m=0.008$

$x_0=5$ $x_1=3$ alınırsa

$f(x_0)=f(5)=41$ (y_0)

$f(x_1)=f(3)=-17$ (y_1)

$f(3.586)=-9.60$

pozitif olanı x_0, negatif olanı x_1 al. + ve - çıkmazsa kök

x_n	$x_{n+1}=x_0-\frac{(x_1-x_0)\cdot y_0}{(y_1-y_0)}$	$h=\lvert x_{n+1}-x_0\rvert<\varepsilon_m$
$x_0=5$ $x_1=3$	3.586	
x_2 3.586	3.854	
x_3 3.854	3.900	
x_4 3.900	3.967	
3.967	3.990	
x_5 3.990	3.997	
3.997		

Son iki değerden $\lvert x_7-x_6\rvert=0,007$ dur işlem biter.

— DOĞRUSAL CEBRİK DENKLEM TAK. ÇÖZÜMÜ —

1-) Ters Matris

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n=b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_n$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{adjA}{DetA}} \qquad \boxed{X=A^{-1}.B}$$

2- Cramer Kuralı

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{DetA} \qquad X_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{DetA}$$

$X_3=$

[illegible]

- Alt veya üst üçgen matris yaparak çözebiliriz
- Bu yöntem için $det \neq 0$ olmalıdır
- Köşegenlerdekilerin hepsi $\neq 0$ olmalıdır

<u>1.adım:</u> $a_{11} \neq 0$ varsayım ile katsayı matrisinin ilk satırı a_{11} 'e bölünür

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{13} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \quad a_{12}' = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad a_{13}' = \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad b_1' = \frac{b_1}{a_{11}}$$

<u>2.adım:</u> ilk satır a_{21} ile çarpıp ikinci satırdan ve aynı şekilde ilk satırı a_{31} ile çarpıp üçüncü satırdan çıkarsak.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & b_3' \end{array}\right] \quad a_{22}' = a_{22} - a_{12}' \cdot a_{21}$$

<u>3.adım:</u> Üçüncü adım olarak son matriste ikinci satır a_{22}' ile bölünerek,

$$a_{23}'' = \frac{a_{23}'}{a_{22}'} \quad \text{ve} \quad b_2'' = \frac{b_2'}{a_{22}'} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & b_2'' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & b_3' \end{array}\right]$$

<u>4.adım:</u> ikinci satır a_{32}' ile çarpılıp üçüncü satırdan çıkarılırsa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{array}\right] \text{olur.} \quad a_{33}'' = a_{33}' - a_{23}'' \cdot a_{32}'$$

<u>5.adım:</u> $a_{33}'' \neq 0$ varsayalım son satırı a_{33}'' bölünür

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & 1 & b_3''' \end{array}\right] \text{elde edilir}$$

$$b_{33}''' = \frac{b_3''}{a_{33}''}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & 1 & a_{23}'' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2'' \\ b_3''' \end{bmatrix}$$

$$x_3 = b_3'''$$

$$x_2 = b_2'' - a_{23}'' \cdot x_3$$

$$x_1 = b_1' - a_{12}' x_2 - a_{13}' \cdot x_3 \quad \text{olur.}$$

<u>Örn:</u>

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -11$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -8$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$

<u>1.adım:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

<u>2.adım:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

<u>3.adım:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

<u>4.adım:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ -5.4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>5.adım:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.4 \\ 5.4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = -2$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 = 1$$

4-) Gauss-Jordan

Eliminasyondaki üçgen matrisi birim matris yapmaktır

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

1.adım: 2.satır a_{12} ile çarpılıp 1.satırdan çıkarılır

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}' \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad b_1' = b_1 - a_{12} \cdot b_2 \qquad a_{13}' = a_{13} - \ldots$$

2.adım: 3.satır a_{13}' ile çarpılarak 1.satırdan çıkarılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1'' \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad b_1'' = b_1' - a_{13}' b_3$$

3.adım: 3.satır a_{23} ile çarpılarak 2.satırdan çıkarılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1'' \\ b_2' \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad b_2' = b_2 - a_{23} \cdot b_3$$

Soru

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.8 & 2.6 \\ 0 & 1 & -1.2 & 5.4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

b- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5.4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ $\qquad C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -2$

Gauss Jordan ile Ters Matrisin Elde edilmesi

$A^{-1} = A.I$ Bu çarpıma G.J uygulanırsa Sonucunda A matrisi I matrisine I matrisinde A^{-1} matrisine dönüşür.

Yani B yerine Birim matris koyulacak

5-) Cholesky Yöntemi

3

A: Katsayı matrisi

L = Alt üçgen matris

U: Köşegen elemanları bir olan üst üçgen matris

- L ve U'nun çarpımın A olduğunu varsayarsak

$$A \cdot x = B \Rightarrow L.U.x = B \quad \text{olur.}$$

$U.x = y$ dersek $L.y = B$ elde edilir.

O halde $A = L.U$ olacak şekilde L ve U bulunabilirse sırasıyla,

1- $L.y = B$'den y matrisi

2- $U.x = y$'den de x matrisi bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{Katsayılar matrisi}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1.adım: L'nin 1.satırını U ile çarparsak a_{11}, a_{12}, a_{12} eşitlikte olur. Buradan l_{11}, u_{12}, u_{13} bulunur.

2.adım: L'nin 2.satırını U ile çarparsak a_{21}, a_{22}, a_{23} eşitlikte olur. l_{21}, l_{22}, u_{23} bulunur.

3.adım: 3.satırı U ile çarparsak l_{31}, l_{32}, l_{33} bulunur.

- L ve U'nun elemanları bulunduktan sonra $L.y = B$'den y, $U.x = y$'den X çözülür.

Dikkat edilirse L'nin ilk sütunu A'nın ilk sütununa eşittir. İşlem yapmadan alınabilir.

5 — 17 - 41

ÖRNEK

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

L ve U'yu bulalım.

$l_{11} = a_{11} = 1 \qquad l_{11} U_{12} = a_{12} = 2$

$l_{21} = a_{21} = 2 \qquad l_{21} \cdot U_{12} + l_{22} = 5 \rightarrow l_{22} = 1$

$l_{31} = a_{31} = 3 \qquad l_{31} U_{12} + l_{32} = a_{32} = 1 \rightarrow l_{32} = -5$

$U_{12} = 2, \qquad l_{11} U_{13} = a_{13} = 3 \qquad U_{13} = 3$

$l_{21} U_{13} + l_{22} U_{23} = a_{23} = 2 \rightarrow U_{23} = -4$

$l_{31} U_{13} + l_{31} U_{23} + l_{33} = a_{33} = 5 \rightarrow l_{33} = -24$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Buradan

$$L \cdot y = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$U \cdot x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Ödev

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$ Choleski ile yapın

$y_1 = 4,\ y_2 = 2,\ y_3 = 10,\ y_4 = -2$

$x_1 = -2,\ x_3 = 6\ \ x_2 = 9\ \ x_1 = -3$ çıkar.

Koşulu sağlandığı takdirde verilen yaklaşık kökler iteratif işlemde düzeltilir. Rutin devam eder.

1. Verilen denklem takımından i. denklem olarak x_i nin katsayısı en büyük olan denklem seçilir.

2- Böylece düzenlenmiş i. denklemde x_i nin katsayısı a_{ii} ise

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad n: \text{denklem sayısı} \quad j \neq i$$

ve denklem takımı içerisinde en az bir denklem için

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ koşulunu sağlaması yeterli.

Ama gerekli değil olmasada çözülebilir.

– Basit iterasyon yöntemi kullanılır

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_4 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$ Eğer başlangıç değerleri biliniyor $\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$ (Yaklaşık kökler)

$$x_1' = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}}{a_{11}} \qquad h_1 = |x_1' - x_1^0|$$

$$x_2' = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}}{a_{22}} \qquad h_2 = |x_2' - x_2^0|$$

$$x_3' = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{22}x_3^{(0)}}{a_{33}} \qquad h_3 = |x_3' - x_3^0|$$

Eğer hata kabul edilebilir çözümse sonuç bulunmuş demektir.

Yanı

$$\left.\begin{aligned} h_1^n &= |x_1^{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ h_2^n &= |x_2^{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ h_3^n &= |x_3^{n+1} - x_n| < \varepsilon \end{aligned}\right\}$$ Bu şartlar aynı anda sağlanmalıdır ve kök bulunmuştur.

Böyl varsa bir daha bakılır.

Genelleştirilse :

$$x_1^{n+1} = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^n - a_{13} \cdot x_3^n}{a_{11}}$$

$$x_2^{n+1} = \frac{b_2 - a_{21} x_1^n - a_{23} x_3^n}{a_{22}}$$

$$x_3^{n+1} = \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^n - a_{22} x_3^n}{a_{33}}$$

Örnek :

(2) $x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 8$
(1) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
(4) $x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 8$
(3) $x_1 + 2x_3 + x_4 = 4$

$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = 0$

$\varepsilon_m = 0.05$

pivotlama yapılırsa ;
Katsayılar bilinmeyene göre en büyük olacak şekilde denklem sırası değiştirilse;

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 8$$
$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 8$$

$x_1 = \dfrac{6 - 2x_2 - x_3}{3}$ $\quad x_2 = \dfrac{8 - x_1 - 3x_4}{4}$

$x_3 = \dfrac{4 - x_1 - x_4}{2}$ $\quad x_4 = \dfrac{8 - x_1 - x_2 - x_3}{5}$

i	x_1^{n+1}	x_2^{n+1}	x_3^{n+1}	x_4^{n+1}	h_1^n	h_2^n	h_3^n	h_4^n
0	2	2	2	8/5	2	2	2	8/5
1	0	3/10	1/5	2/5	2	17/10	9/5	6/5
2								

$\leq \varepsilon = 0.05$

7-) Jacobi Yöntemi (4)

Gauss-Sheild'in iyileştirilmiş hali

Gene aynı denklem a matrisi $x_1, x_2, x_3 = b_1, b_2, b_3$
$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0$ ilk yaklaşık değerler için

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2^0 - a_{13} \cdot x_3^0}{a_{11}}$$

$$x_2^1 = \frac{b_2 - a_{21} x_1^0 - a_{23} \cdot x_3^0}{a_{22}}$$

$$x_3^1 = \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^0 - a_{32} x_2^0}{a_{33}}$$

elde edilir. Mutlak hata kontrolü yapılır. Sonra devam edilir. Yani

$h_1 < \varepsilon$, $h_2 < \varepsilon$ ve $h_3 < 3$ olmalıdır.

Genelleştirilse :

$$x_1^{n+1} = \frac{b_1 - a_{12} x_2^n - a_{13} \cdot x_3^n}{a_{11}}$$

$$x_2^{n+1} = \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^n - a_{23} \cdot x_3^n}{a_{22}}$$

$$x_3^{n+1} = \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^n - a_{32} \cdot x_2^n}{a_{33}}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1^n = |x_1^{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ \quad 2 \qquad\quad 2 \qquad\quad < \varepsilon \\ \quad 3 \qquad\quad 3 \qquad\quad < \varepsilon \end{array}\right\}$$ Aynı anda sağlamalıdır

- Doğrusal olmayan Denklem Takımlarının Çözümü

• en etkin çözüm newton-raphson yöntemidir.

$$f(x_0,y_0) + \Delta x \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

$$g(x_0,y_0) + \Delta x \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}$$

$f(x,y)=0$
$g(x,y)=0$ iki doğrusal olmayan denklemin kökleri x_0, y_0 ile.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

Δx, Δy herşey belli olduğundan bulunur

bunlar hatadan küçükse işlem durdurulur ve düzeltilmiş kök olarak

$x_1 = x_0 + \Delta x$
$y_1 = y_0 + \Delta y$

Eğer hatadan büyükse x_1, y_1 yaklaşık kök olarak alınır işlem tekrarlanır.

ÖRN $f(x,y) = x^2 + y - 3 = 0$
$g(x,y) = y^2 + x - 5 = 0$

denklem takımının $(x_0 = 0.6,\ y_0 = 1.5)$ noktası civarındaki bir kökünü 0.08 mutlak hatasıyla bulunuz

Bunları yerine yaz $f(x_0,y_0)$ $g(x_0,y_0)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2y$ $x_0 = 0.6$, $y_0 = 1.5$ için

$f(x_0,y_0) = -1,14$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 1,2$

$g(x_0,y_0) = -2.15$, $\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} = 3$

$$\begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1.14 \\ -2.15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta x = 0.488 \\ \Delta y = 0.533 \end{matrix}$$

$\Delta x > \varepsilon$ $\Delta y > \varepsilon$ olduğundan

$x_1 = x_0 + \Delta x = 0.6 + 0.488 = 1.088$
$y_1 = y_0 + \Delta y = 1.5 + 0.553 = 2.05$

$f(x_1,y_1) = 0,223$

$\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x} = 2.176$ $g(x_1,y_1) = 0.29$ $\frac{\partial (x_1 y_1)}{\partial y} = 4.1$

$$\begin{bmatrix} 2.176 & 1 \\ 1 & 4.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0,223 \\ -0,29 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \Delta x = -0.0[illegible] \\ \Delta y = 0.0[illegible] \end{matrix}$$

-0.02
-0.01

$1.2 \Delta x + \Delta y = +1.14$
$\Delta x + 3 \Delta y = 2.15$

DENK. VE DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ

Doğrusal Olmayan denklemlerin çözümü

1. Basit İterasyon

$f(x)=4e^{-0,5x}-x$ denkleminin kökünü $x_0=3$ başlangıç değeri için 0.05 mutlak hata ile bulunuz.

Diğer örnekte: $f(x)=4.\ln x-x$

$$x=4e^{-0,5x}=g(x)$$

x	$x_{n+1}=g(x)$	$h=\lvert x_{n+1}-x_n\rvert\le E_m=0.05$
3	0.89	3-0.89=2.11
0.89	2.56	1.67
2.56	1.1	1.46
⋮		⋮

25 iterasyon sonra $E=0.05$ hata ile kök=1.7 bulunur.

2. Aralığı ikiye bölme

f(x)'in kökleri zıt işaret olmalıdır. $f(x_a).f(x_b)<0$ kesinlikle yeri belli değil.

$$f(x)=y=x^4-9x^3-2x^2+120x-130$$

$x=[1,2]$ aralığında kökü var mıdır? varsa $E_m=0.06$ mutlak hata ile bulunuz.

$x_a=1$ için: $y_1=-20$
$x_b=2$ için $y_2=+46$ zıt olduğundan

$x_3=\frac{x_a+x_b}{2}=\frac{1+2}{2}=1.5$ için $y_3=+20,2$'dir.

$h=|1-1,5|=0,5$

x_a ile zıt olduğundan $x_4=\frac{1+1.5}{2}=1,25$ $y_4=+1,8$

$h=|1-1,25|=0,25$

x_a ile zıt olduğundan $x_5=\frac{1,25+1}{2}=1,125$ için $y_5=-8,7$

$h=|1,125-1,25|=0,125$

x_b ile zıt olduğundan $x_6=\frac{2+1,125}{2}=1,187$

işlemleri $E_m\le 0,06$ olana kadar gider.

3. Newton-Raphson Yöntemi

$f(x_n)=x^4-3x^3+6x^2-16$ nın $x_0=4$ civarındaki kökünü 0.05 mutlak hata ile bulunuz.

$$f'(x_n)=4x^3-9x^2+12x$$

x_n	$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x)}{f'(x_n)}$	$h=\lvert x_{n+1}-x_n\rvert<E_m=0.05$
4	3.10	0.9
3.1	2.46	0.64
2.46	2.10	0.36
2.10	2.005	0.095
2.005	1.999	0.006<0.05

NOT: en fazla 5 adım yap, Basit-it göre dikkat... fakat sin, cos'un bol olduğu yöntemlerde kullanılmaz.

4-) Kiriş Yöntemi

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n-x_{n-1})\cdot y_{n-1}}{(y_n-y_{n-1})}$$

VİZE

Örn: $f(x)=x^3-20x+16$ nın 3-5 arasındaki bir kökünü kiriş yöntemini uygulayarak 0.008 hata ile bulun.

$x_0=5$ $f(x_0)=41=y_0$ pozitif olanı x_0 al
$x_1=3$ $f(x_1)=-17=y_1$ negatif " x_1 al

x_n	$x_{n+1}=x_0-\frac{(x_n-x_0)y_0}{(y_n-y_0)}$	$h=\lvert x_{n+1}-x_0\rvert<E_m=0.008$
5, 3	3.586	0,586
3,586	3.854	0,268
3,854	3,900	0,044
3,900	3,967	0,067
⋮	⋮	⋮
$\boxed{x_k=4}$	3,997	0,003<E_m

Doğrusal denklem takımının çözümü

1-) Ters matris $A^{-1}=\frac{\text{adj}A}{\text{Det}A}$ $x=A^{-1}b$

2-) Cramer

3-) Gauss Eliminasyon Yöntemi

Alt veya üst üçgen matris yaparak çözülebilir.

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}a_{11}&a_{12}&a_{13}&b_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&b_2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&b_3\end{array}\right]$$

1. adım: ilk satır a_{11}'e böl

2. adım: ilk satırı a_{21} ile çarpıp ikinci satırdan, yine ilk satırı a_{31} ile çarpıp üçüncü satırdan çıkar

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&a_{12}&a_{13}&b_1'\\0&a_{22}&a_{23}&b_2'\\0&a_{32}&a_{33}&b_3'\end{array}\right]$$ oldu şimdi a_{22}'yi 1 yapcaz

3. adım: 2. satır a_{22}'ye böl $\left[\begin{array}{ccc|c}1&a_{12}&a_{13}&b_1\\0&1&a_{23}&b_2\\0&a_{32}&a_{33}&b_3\end{array}\right]$ oldu

4. adım: 2. satırı a_{32} ile çarp üçüncüden çıkar.

5. adım: son satır a_{33}'e bölünür. $\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\0&1&a_{23}\\0&0&1\end{bmatrix}$

4-) Gauss Jordan Yöntemi

[illegible] birim matris halini

1. adım: 2. satır a_{12} ile çarpılıp 1. satırdan çıkar.

2. adım: 3. satır a_{13} ile çarpılıp 1. satırdan çıkarılır.

3. adım: 3. satır a_{23} ile çarpılıp 2. satırdan çıkarılır.

5-) Cholesky Yöntemi

6-) Gauss-~~Shield~~ Siedel

$x_1+4x_2+3x_4=8$
$3x_1+2x_2+x_3=6$
$x_1+x_2+x_3+5x_4=8$
$x_1+2x_3+x_4=4$

Pivotlama yapılacak. Katsayılar bilinmeyene göre en büyük olacak şekilde sıralanır.

$x_1^0=x_2^0=x_3^0=x_4^0=0$

$\varepsilon_m=0.05$

$3x_1+2x_2+x_3=6 \qquad x_1=\dfrac{6-2x_2-x_3}{3}$

$x_1+4x_2+3x_4=8 \qquad x_2=\dfrac{8-x_1-3x_4}{4}$

$x_1+2x_3+x_4=4 \qquad x_3=\dfrac{4-x_1-x_4}{2}$

$x_1+x_2+x_3+5x_4=8 \qquad x_4=\dfrac{8-x_1-x_2-x_3}{5}$

i	x_1^{n+1}	x_2^{n+1}	x_3^{n+1}	x_4^{n+1}	h_1^n	h_2^n	h_3^n	h_4^n
0	2	2	2	8/5	2	2	2	8/5
1	0	3/10	1/5	2/5	2	17/10	9/5	6/5
2	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3								

$< \varepsilon_m=0.05$

* Hatalar bulduğun değerle bir öncekinin farkıdır.

7-) Jacobi Yöntemi

Gauss-Siedel'in iyileştirilmiş halidir. Denklem aynı. Sadece Gauss'da x'in her yeni değeri hemen kullanılır.

Örnek

$$\begin{bmatrix}4&1&1&0\\1&4&0&1\\1&0&4&1\\0&1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$$ Jacobi ile.

$4x_1+x_2+x_3=1 \Rightarrow x_1=\dfrac{1-x_2-x_3}{4}$

$x_1+4x_2+x_4=2 \Rightarrow x_2=\dfrac{2-x_1-x_4}{4}$

$x_1+4x_3+x_4=0 \Rightarrow x_3=\dfrac{-x_1-x_4}{4}$

$x_2+x_3+4x_4=1 \Rightarrow x_4=\dfrac{1-x_2-x_3}{4}$

1. iterasyon:

$x_1=\dfrac{1-0-0}{4}=0{,}25 \qquad x_3=\dfrac{0}{4}=0$ — ilk değerler 0 ile başla.

$x_2=\dfrac{2-0-0}{4}=0{,}5 \qquad x_4=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

* Her iterasyonda hesaplanan tüm x değerlerini bir sonraki iterasyonda kullan.

2. iterasyon:

$x_1=\dfrac{1-0{,}5-0}{4}=0{,}125 \qquad x_3=\dfrac{-0{,}25-0{,}25}{4}=-0{,}125$

$x_2=\dfrac{2-0{,}25-0{,}25}{4}=0{,}375 \qquad x_4=\dfrac{1-0{,}5-0}{4}=0{,}125$

3. iterasyon

$x_1=\dfrac{1-0{,}3750+0{,}125}{4}=0{,}1875$ ... diye gider.

Aynı örnek Gauss-Siedel için

$x_1=\dfrac{1-0-0}{4}=0{,}25$ — 1. iterasyon — Hemen kullanılır bulunan x değerleri odur.

$x_2=\dfrac{2-0{,}25-0}{4}=0{,}4375$

$x_3=\dfrac{-0{,}25-0}{4}=-0{,}0625$

$x_4=\dfrac{1-0{,}4375+0{,}0625}{4}=0{,}1563$

2. iterasyon:

$x_1=\dfrac{1-0{,}4375+0{,}0625}{4}=0{,}1563 \qquad x_3=\dfrac{-0{,}1563-0{,}1563}{4}=-0{,}07$

$x_2=\dfrac{2-0{,}1563-0{,}1563}{4}=0{,}4219 \qquad x_4=\dfrac{1-0{,}4219+0{,}07}{4}=0{,}16$

$h_{1,2,3}^n=|x_1^{n+1}-x_n|<\varepsilon$ Hepsi için olunca durdurulur.

Doğrusal Olmayan Denklem takımlarının çözümü

- en etkin çözüm newton-raphson

$f(x,y)=x^2+y-3=0$
$g(x,y)=y^2+x-5=0$

takımının $x_0=0{,}6$, $y_0=1{,}5$ noktasındaki kökünü $\varepsilon=0{,}05$ ile bulun.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=1 \qquad x_0=0.6$, $y_0=1.5$ için

$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=1, \qquad \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}=2y \qquad f(x_0,y_0)=-1{,}14$, $g(x_0,y_0)=-2{,}15$

$$\begin{bmatrix}1.2&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-1{,}14\\-2{,}15\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta x=0{,}488, \ \Delta y=0.533$$ $<\varepsilon_m$ olmadığı

formülde

$x_1=x_0+\Delta x=0.6+0.488=1.088$

$y_1=y_0+\Delta y=1.5+0.553=2.05$

Gene aynı işlem yapılır $\Delta x=-0{,}07$, $\Delta y=0{,}04$ bulunur. $<\varepsilon_m$ olduğundan

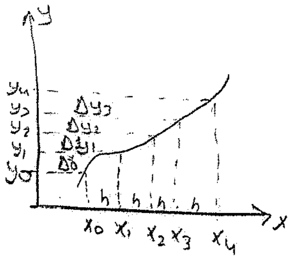
$x_2=x_1+\Delta x=1.081$
$y_2=y_1+\Delta y=2.005$ dur.

— VİZE SON —

SONLU FARKLAR

(5)

1-) İleri yön sonlu farklar



$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0+h) - f(x_0)$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0+2h) - f(x_0+h)$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_0+3h) - f(x_0+2h)$

$\vdots$

$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(x_0+(n+1)h) - f(x_0+n.h)$

Δ'ların kuvvetlerindende bahsedilebilir

$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0$

$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(\Delta y_1 - \Delta y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

$\vdots$

$\Delta^n y_0 = \Delta(\Delta^{n-1} y_0)$

ÖRNEK

Verilen aşağıdaki değerler için ileri yön sonlu farklar tablosunu hesaplayınız

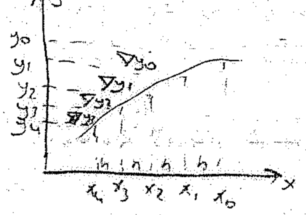
x	0	1	2	3	4	5
y	-7	-3	6	25	62	129

El-cevap

→ NOT: y değerleri için farklar alınır.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-7	4	5	5	3	1
1	-3	9	10	8	4	
2	6	19	18	12		
3	25	37	30			
4	62	67				
5	129					

2-) Geri yön sonlu farklar



$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}$ → Bir önceki

$\nabla y_1 = y_1 - y_{-2}$

Kuvvetler

$\nabla^2 y_0 = \nabla(\nabla y_0) = \nabla y_0 - \nabla y_1$

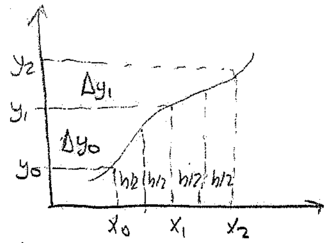
ÖRNEK

Bir önceki tabloyu geri yön sonlu f. ile oluşturunuz.

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
0	-7					
1	-3	4				
2	6	9	5			
3	25	19	10	5		
4	62	37	18	8	3	
5	129	67	30	12	4	1

3-) Merkezi yön sonlu farklar

FİNAL BAŞLANGIÇ



$\delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i$

Kuvvetler ise:

$\delta^2 y_{m+1/2} = \delta(\delta^{n-1} y_{m+1/2})$

ÖRNEK:

Daha önceki verilen ölçümler için merkezi sonlu farklar tablosunu hazırlayınız.

x	y	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y_{1/2}$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y_{1/2}$
0	-7					
		4				
1	-3		5			
		9		5		
2	6		10		3	
		19		8		1
3	25		18		4	
		37		12		
4	62		30			
		67				
5	129					

Enterpolasyonlar

1. Gregory-Newton Enterpolasyonları

*Sınav Bonko

a-) İleri Yön Sonlu Farklar Enterpolasyonu

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y_0 = y_1 - y_0 \\ \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \end{array}\right\}$$ Buradan şunlar yazılabilir:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = (1+\Delta) y_0$

$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (1+\Delta) y_1 = (1+\Delta)^2 y_0$

$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (1+\Delta) y_2 = (1+\Delta)^3 y_0$

Genelleştirilirse $= y_p = (1+\Delta)^p y_0$

Genel yapan binom açılımı yazılırsa:

$$\boxed{y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots}$$

$y_p = f(x_p) = f(x_0 + p.h)$ [illegible]

[illegible] $x_0 + ph$

$x_1 = x_0 + p.h \Rightarrow \boxed{p = \frac{x_1 - x_0}{h}}$

$y_p = f(x_0 + p.h)$

Örnek (Sınav)

Aşağıdaki verilen değerler kullanarak $x=1.1$'deki y_p değerlerini bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5
y	-7	-3	6	25	62	129

Birönceki sayfadaki ileri yön tablosu çizilir.

verilen değer (x=1.1)

$$P=\frac{x_p-x_0}{h} \qquad \{y_p=f(x_p)\}$$

tabloda x değerlerinde $x_p=1.1$ en yakın neresidir. 1'dir. yani onun bulunduğu satır kullanılacak.

$x_0=1 \Rightarrow p=\frac{1.1-1}{1}=0.1$

$y_0=-3$
$\Delta y_0=9$
$\Delta^2 y_0=10$
$\Delta^3 y_0=8$
$\Delta^4 y_0=4$

$$y_p=y_0+\frac{p}{1!}\Delta y_0+\frac{p.(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0\ldots$$

$$y_p=-3+0.1\cdot 9+\frac{0.1(0.1-1)}{2}\cdot 10+\frac{0.1(0.1-1)(0.1-2)}{6}\cdot 8$$
$$+\frac{0.1.(0.1-1)(0.1-2)(0.1-3)}{24}\cdot 4$$

$$\boxed{y_p=-2.4067}$$

NOT: $x_p=1.1$ 1-2 arasında olduğu için y_p'de -3 ile 6 arasında olmalıdır. çünkü x_p ile aynı aralıkta

NOT: Amacımız Δy'leri çoğaltmak. eğer 1.5 alsak 1.'i almak daha avantajlı çünkü Δ'sı fazla eğer 4.2 gibi bir değer olsa geri yön alırız.

Geri yön sonlu farklar ile enterpolasyon.

$E=1+\Delta=\frac{1}{1-\nabla}=(1-\nabla)^{-1}$ bağıntısından faydalanılırsa;

$$y_p=(1+\Delta)^p y_0=\left(\frac{1}{1-\nabla}\right)^p y_0=(1-\nabla)^p y_0$$

Enterpolasyon bağıntısından şöyle olur;

$$y_p=y_0+\frac{p}{1!}\nabla y_0+\frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 y_0+\frac{p.(p+1)(p+2)}{3!}\nabla^3 y_0+\ldots$$

Yine burada, $p=\frac{x_p-x_0}{h}$'dır.

Örn/ Aşağıda verilen değerler kullanılarak $x_p=7.8$'deki y_p değerini bulunuz.

m_y (Nm)	0	2	4	6	8
n (d/d)	1000	916	836	740	624

x (Nm)	y (n)	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
0	1000				
2	916	-84			
4	836	-80	4		
6	740	-96	-16	-20	
8	624	-116	-2	-4	16

7.8

$x_0=8$, $y_0=624$ $\nabla y_0=-116$ $\nabla^2 y_0=-2$ $\nabla^3 y_0=-2\ldots$

$$p=\frac{x_p-x_0}{h}=\frac{7.8-8}{2}=0.1$$

$$y_p=624+(-0.1)(-116)+\frac{(-0.1)(0.9)}{2}\cdot(-20)+\ldots$$

$$\boxed{y_p=636.3 \text{ dt/devir}}$$

Merkezi Yön Sonlu Farklar ile Enterpolasyon

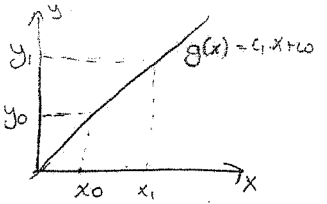
a-Stirling bağıntısı

$$y_p=y_0+\frac{p}{2}(\delta y_{1/2}+\delta y_{-1/2})+\frac{p^2}{2!}\delta^2 y_0+\frac{p(p^2-1)}{2.(3!)}$$
$$(\delta^3 y_{1/2}+\delta y_{-1/2})+\frac{p^2(p^2-1)}{4!}\cdot\delta^4 y_0\ldots$$

b-) Bessel Bağıntısı

$$y_p=\frac{y_0+y_1}{2}+\left(p-\frac{1}{2}\right)\delta y_{1/2}+\frac{p(p-1)}{2!}\cdot\frac{(\delta^2 y_0+\delta^2 y_1)}{2}+$$
$$\frac{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)}{3!}\delta^3 y_{1/2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{4!}\cdot\frac{(\delta^4 y_0+\delta^4 y_1)}{2}+\ldots$$

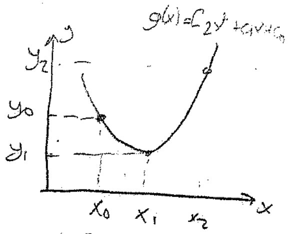
Lagrange Enterpolasyonu



Doğrusal durumda

$c_1 \cdot x_0 + c_0 = y_0$

$c_1 \cdot x_1 + c_0 = y_1$



Karesel durumda

$C_2 x_0^2 + C_1 x_0 + C_0 = y_0$

$C_2 x_1^2 + C_1 x_1 + C_0 = y_1$

$C_2 \cdot x_2^2 + C_1 x_2 + C_0 = y_2$

Burada c_1 ve c_0 bulunabilir ve bulunduktan sonra yerine yazılırsa;

$$\boxed{g(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \cdot y_1}$$

Bulunup $g(x)$'de yerine yazarsak (c_0, c_1, c_2'yi)

$$g(x) = \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{L_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)}}_{L_1(x)} y_1 + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{L_2(x)} y_2$$

$L_i(x)$'lere Lagrange katsayıları denir.

$g(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2$

L_i'ler şöyle yazılabilir;

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots\dots(x_i-x_n)}$$

Example

i	0	1	2	3
x	1 ②	3 ①	4 ②	6
y	-7	5	8	14

aralıklar eşit değil bu yüzden newton (gregory) olmaz. lagrange olması gerekir.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} = L_0 = ?$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)}$$

$L_2(x)$ ve $L_3(x)$'lerde bulunur.

$g(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 + L_3(x) y_3$

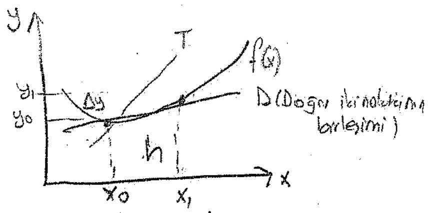
$g(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$

$x_p = 2 \Rightarrow g(2) = \frac{1}{2}(2^3 - 13 \cdot 2^2 + 69 \cdot 2 - 92) = 1$

Önce $L_0(2), L_1(2), L_2(2), L_3(2)$'ler bulunup sonra $\frac{2}{10}(-7) + \frac{8}{6}(5) - \frac{1}{3} \dots + \frac{2}{5}(14)$ bu şekilde bulunması gerek

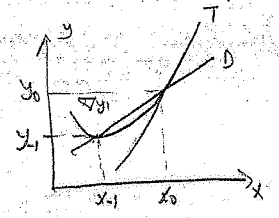
SAYISAL TÜREV

1. Sonlu farklarla sayısal türev



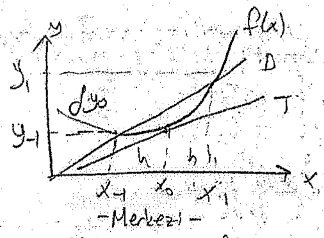
D'nin eğimi $= \frac{\Delta y}{h}$

$f'(x_0) = y' \approx \frac{\Delta y}{h}$ (Yani T'ye türev eşitken kabul ediyoruz)



— Geriye sonlu fark —

$f'(x_0) = y' \approx \frac{\nabla y_0}{h}$



— Merkezi —

$f'(x_0) = y' \approx \frac{\delta y_0}{2h}$

Enterpolasyon Bağıntılarıyla sayısal türev

1. İleri Yön sonlu farklar için;

$f(x_p) = y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\Delta y_0 + \frac{p \cdot p(-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots\dots, \quad p = \frac{x_p - x_0}{h}$

$f'(x_p) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-x_0}{h}\right) = \frac{1}{h}$

Çarpıp türevleri alınmış halidir

$\frac{dy}{dp} = \Delta y_0 + \frac{2p-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3p^2-6p-2}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$

$f'(x_p) = \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dy}{dp}$

$$\boxed{y' = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_0 + \frac{2p-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots\dots\right\}}$$

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dx}\right\}$

$y'' = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d}{dp}\left\{\frac{dy}{dx}\right\}$

$\frac{2}{2}\Delta^2 y_0$ $\quad \frac{6p-6}{6}\Delta^3 y_0$

$y'' = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{d}{dp}\left\{\frac{dy}{dp}\right\} \Rightarrow y'' = \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_0 + (p-1)\Delta^3 y_0 + 6p^2 - 18p \dots\right.$

Şimdi 7 tane Δ varsa bu formülü yap ama 4 tanesini yap tam puan alırsın

$6p^2 - 18p + 22 \dots \frac{\quad}{\quad} y_0 + \dots$

Eğer geri yön sonlu farklar kullanılırsa

$$y' = \frac{1}{h}\left(\nabla y_0 + \frac{2P+1}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{3P^2+6P+2}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{4P^3+18P^2+22P+6}{4!}\nabla^4 y_0 \right)$$

↗ Hepsi (+) olacak

Merkezi yön sonlu farklar kullanılırsa

$$\cancel{y_p' = \frac{1}{h}\left\{ \delta y_{1/2} - \frac{1}{4}\left(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1\right) + \frac{1}{12}\delta^3 y_{1/2} + \right\}}$$

NOT:
Sınavda δ (deltaların) hepsini kullanma 5-6 verirse 3 tane yap yeter.

ÖRNEK
Aşağıda verileri kullanarak $x=1.2$, $x=2.2$ ve $x=4.2$'deki türevleri bulunuz

x	0	1	2	3	4	5
y	2	9	60	191	433	837

ileri yön $x=1.2$ merkezi yön $x=2.2$ Geri yön

$x=1.2$ için

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	Δ^4
0	2	7	44	36	0
1	9	51	80	36	0
2	60	131	116	36	
3	191	247			
4	433	399			
5	837				

aynı olmasının sebebi 3'dereceden birdenklem 3.türevi var 4.yok.

$$y_p' = \frac{1}{h}\left\{ \Delta y_0 + \frac{2P-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3P^2-6P+2}{6}\Delta^3 y_0 \right\}$$

$$P = \frac{X_P - X_0}{h} = \frac{1.2-1}{1} = 0.2$$

$\Delta y_0 = 51$, $\Delta^2 y_0 = 80$, $\Delta^3 y_0 = 36$

$$y_p' = \frac{1}{1}\left\{ 51 + \frac{2.(0.2)-1}{2}.80 + \frac{3.(0.2)^2 - 6.(0.2)}{6}.36 \right.$$

$\boxed{y_p' = 32.52}$

$x=4.2$ için

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
0	2				
1	9	7			
2	60	51	44		
3	191	131	80	36	
4	433	247	116	36	0
5	837	399	152	36	0

$$y_p' = \frac{1}{h}\left\{ \nabla y_0 + \frac{2P+1}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{3P^2+6P+2}{6}\nabla^3 y_0 \right\}$$

$P = \frac{4.2-4}{1} = 0.2$ $\nabla y_0 = 247$ $\nabla^2 y_0 = 116$ $\nabla^3 y_0 = 36$

$\boxed{y_p' = 348.12}$

$x=2.2$ için

x	y	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y_{1/2}$	$\delta^4 y$
0	2				
		7			
1	9		44		
		51		36	
2	60		80		
		131		36	
3	191		116		
		247			
4	433		152		
		399			
5	837				

Bunu yaz

$$\boxed{y_p' = \frac{1}{h}\left\{ \delta y_{1/2} + \frac{2P-1}{2}\left(\frac{\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1}{2}\right) + \frac{3P^2-3P+1/2}{6}.\delta^3 y_{1/2} \right\}}$$

$P = \frac{2.2-2}{1} = 0.2$, $\delta y_{1/2} = 131$, $\delta^2 y_0 = 80$, $\delta^2 y_0 = 80$ Ara
$\delta^2 y_1 = 116$, $\delta^3 y_{1/2} = 36$

$\boxed{y_p' = 101.72}$

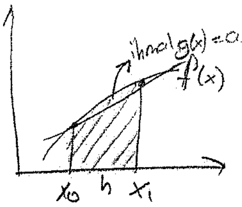
$y = 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2$
$y' = 18x^2 + 8x - 3$ ← Polinom bu bizim yaptığımız polinom yaksa test edebiliriz.

x'e 1.2 koyduğumuzda sonuç 32.52 çıkacak. Ordu doğru

SAYISAL İNTEGRAL

• Lagrange (Newton - Cote)

1. m=1 Dilim üzerinden integral



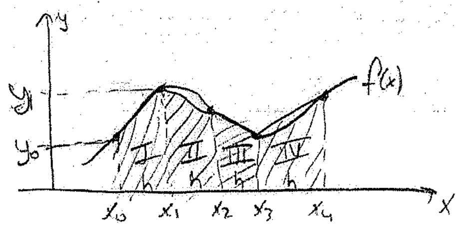
$$I = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_0+h} g(x)\,dx$$

$$g(x) = L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1$$

$$g(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\,y_1$$

Eğer g(x) fonksiyonunun elde edilir ve integral alınırsa;

$\boxed{I = \frac{h}{2}[y_0+y_1]}$ → Yamuk Kuralı

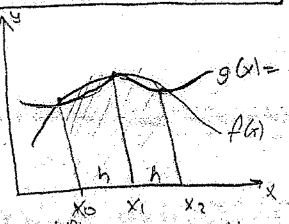


Toplam integral = I + II + III + IV

$$I = \frac{h}{2}[y_0+y_1]$$
$$II = \frac{h}{2}[y_1+y_2]$$
$$III = \frac{h}{2}[y_2+y_3]$$
$$IV = \frac{h}{2}[y_3+y_4]$$

$$I = \frac{h}{2}[y_0+2y_1+2y_2+2y_3+y_4]$$

2. m=2 Dilim üzerinden integral



$$I = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_0+2h} g(x)\,dx$$

$$g(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2$$

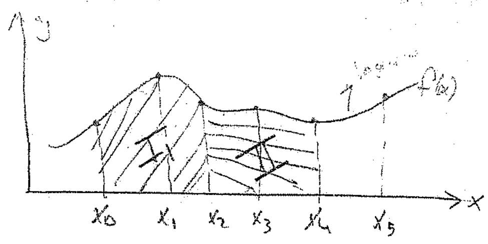
Eğer g(x) elde edilir ve integral alınırsa;

$\boxed{I = \frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]}$ Simpson Kuralı

Simpson kuralı yamuğa göre daha iyi sonuç elde eder.

Ama yukarıdaki örnekte yamuk kuralını kullanacağız.

I_2'yi iki defa kullanacağız.



$$I_1 = \frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]$$
$$I_2 = \frac{h}{3}[y_2+4y_3+y_4]$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4]$$

ÖRNEK

Aşağıdaki değerleri kullanarak $X=[0,5]$ aralığındaki integrali hesaplayın

X	0	1	2	3	4	5
y	2	9	60	191	433	837

Tek dilim olduğu için yamuk olacak

$$I_1 = \frac{1}{2}[2+8] \qquad I_3 = \frac{1}{2}[60+191]$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[9+60] \qquad I_4 = \frac{1}{2}[191+433] \qquad I_5 = \frac{1}{2}[433+837]$$

$$I = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$$

Eğer simpson derse soruda.

$$I_1 = \frac{1}{3}[2+4\cdot 9+60]$$
$$I_2 = \frac{1}{3}[60+4\cdot 191+433]$$
$$I_3 = \frac{1}{2}[433+837]$$

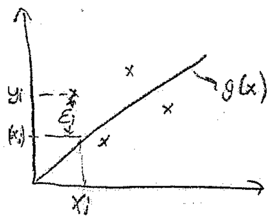
$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Yamuk

Sayısal en zor soru bu.

Eğri Uydurma (Veri Fonksiyon Bulma)

1. Lagrange Enterpolasyonu
2. En küçük Kareler Yöntemi



y_i = ölçülen
$g(x_i)$ = gerçek Eğri

$\Sigma_i = y_i - g(x_i)$

$\Sigma_i^2 = (y_i - g(x_i))^2$ → Hata pozitif çıksın diye

$E = \sum_{i=0}^{N} (y_i - g(x_i))^2$

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$ — a'ları bulucak zaten fonksiyonu bulur

NOT: Eğrinin türevi $\boxed{\cup}$ 0 dır. Yani böylelikle minimum değeri buluruz.

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\Sigma (y - g(x))\right)^2 = 0$$

→ içinin türevi, dışı 1 özelikt. g(x)'de a'lar var

$$-\frac{\partial g(x)}{\partial a_i} \left(\Sigma (y - g(x))\right) = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial g(x_i)}{\partial a_i} g(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial a_i} \cdot \Sigma y_i$$

1.) Doğrusal dağılımlı Verileri eğri uydurma

$\boxed{g(x) = a_0 + a_1 x}$

i=0 için a_0'a göre türev alınırsa:

$$\Sigma \frac{\partial (a_0 + a_1 x)}{\partial a_0} \cdot (a_0 + a_1 x) = \frac{\partial (a_0 + a_1 x)}{a_0} \Sigma y$$

$$\Sigma (a_0 + a_1 x_i) = \Sigma y_i$$

$$\Sigma a_0 + \Sigma a_1 x_i = \Sigma y_i$$

$$\boxed{a_0 n + a_1 \Sigma x_i = \Sigma y_i} \quad (1)$$

i=1 için a_1'e göre türev alınırsa,

$$\Sigma x_i (a_0 + a_1 x_i) = \Sigma x_i y_i$$

$$\boxed{a_0 \cdot \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i} \quad (2)$$

Matris formu ile,

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \end{bmatrix}$$

Buradan a_0 ve a_1 bulunursa g(x) elde edilir.

SOU (8)

ÖRNEK

Aşağıdaki verilere $g(x) = a_0 + a_1 x$ gibi bir fonksiyona uydurunuz.

x_i	0	1	3	5	10
y_i	3	8	18	28	53

$x_i^2 = 0 \quad 1 \quad 9 \quad 25 \quad 100$

$x_i y_i = 0 \quad 8 \quad 54 \quad 140 \quad 530$

$\Sigma x_i = 19 \qquad \Sigma x_i^2 = 135$

$\Sigma y_i = 110 \qquad \Sigma x_i y_i = 732$

$$\begin{bmatrix} 5 & 19 \\ 19 & 135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 732 \end{bmatrix}$$

Buradan $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ olarak

$\boxed{g(x) = 3 + 5x}$ olarak bulunur.

2.) Karesel verilere eğri uydurma

$\boxed{g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$ ise a_0, a_1 ve a_2 şöyle bulunur.

1 numara büyütmek

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_i x_i \\ \Sigma y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki verilere $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ gibi bir fonksiyon bulunuz.

					Σ
x_i	0	1	3	5	9
y_i	5	6	26	70	107
x_i^2	0	1	9	25	35
x_i^3	0	1	27	125	153
x_i^4	0	1	81	625	707
$x_i y_i$	0	6	78	350	434
$x_i^2 y_i$	0	6	251	1750	1990

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 35 \\ 9 & 35 & 153 \\ 35 & 153 & 707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107 \\ 434 \\ 1990 \end{bmatrix}$$

3. Kitabında var oradan matris çözmek

Buradan $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 3$

$g(x) = 5 - 2x + 3x^2$

4. Yüzeysel Verilere Eğri Uydurma

$\boxed{z = g(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y}$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum z_i x_i \\ \sum z_i y_i \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki verilere $g(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ şeklindeki fonksiyon bulunuz. ↗ soru kısmı

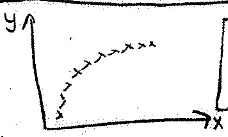
						Σ
x_i	0	1	2	3	4	10
y_i	3	5	7	9	11	35
z_i	34	55	76	97	118	380
x_i^2	0	1	4	9	16	30
y_i^2	9	25	49	81	121	285
$x_i y_i$	0	5	14	27	44	90
$z_i x_i$	0	55	152	291	472	970
$z_i y_i$	102	278	532	873	1298	3080

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 35 \\ 10 & 30 & 90 \\ 35 & 90 & 285 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 380 \\ 970 \\ 3080 \end{bmatrix}$$

$a_0 = 64$, $a_1 = 32$, $a_2 = -16$

$\Rightarrow g(x) = 64 + 32x - 16y$

5. Rasyonel dağılımlı Verilere eğri uydurma



$$g(x) = \frac{x_i}{(C_1 + C_2 x)} u(x)$$

$z_i = \frac{x_i}{y_i}$

$z_i = u(x) = \frac{x}{g(x)}$

Bu aşamadan sonra c_1 ve c_2 sabit bulunur.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum z_i x_i \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

											Σ
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
y_i	0.14	0.16	0.17	0.18	0.195	0.035	...		0.19	0.1	x
$z_i = \frac{x_i}{y_i}$	-	-	-	-	-						296.7
x_i^2											385
$z\,x_i$											2042.3

$$\begin{bmatrix} n & 55 \\ 55 & 385 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 296.87 \\ 2064.3 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 2077$
$c_2 = 4.965$

$$g(x) = \frac{x}{2.397 + 4.965x}$$

6. Exponansiyel Verilere Eğri Uydurma

$z_i = \ln y_i$

$g(x) = A \cdot e^{Bx}$

$\ln(g(x)) = \ln(A \cdot e^{Bx})$

$\underbrace{\ln(g(x))}_{z} = \ln A + Bx$

$= C_1 + C_2 x$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z \\ \sum z x_i \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki veriler $g(x) = A \cdot e^{Bx}$ şeklinde bir fonk. bulun.

						Σ
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	1	0.90	0.81	0.74	0.67	x
$z = \ln y_i$	0	-0.105	-0.210	-0.30	-0.4	-1.018
x_i^2	1	4	9	16	25	55
$z_i x_i$	0	-0.210	-0.63	-1.2	-2.00	-4.046

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.018 \\ -4.046 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 0.098 \\ C_2 = -0.055 \end{matrix}$$

$A \cong 1.1$
$B \cong -0.1$ $\Big\}$ $g(x) = 1.1 \cdot e^{-0.1x}$

1-) DOĞRUSALA EĞRİ UYDURMA

$g(x) = a_0 + a_1 x$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{bmatrix}$$

2-) KARESELE EĞRİ UYDURMA

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

3-) YÜZEYSEL EĞRİ

$z = g(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum z_i x_i \\ \sum z_i y_i \end{bmatrix}$$

4-) EXPONANSİYEL

$g(x) = A \cdot e^{Bx}$

$z_i = \ln y_i$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z \\ \sum z x_i \end{bmatrix}$$

SAYISAL İNTEGRAL (LAGRAGE (Newton-Cote))

1. m=1 dilim üzerinde integral

$$\boxed{I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right]}$$

2. m=2 dilim üzerinde integral → 3'lüy

$$\boxed{I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]}$$ Simpson Kuralı

~~2m~~

x	0	1	2	3	4	5
y	2	9	60	191	4	8

Yada hepsi yanıt 5-tane hesap hepsiy üzerinden

LAGRANGE ENTERPOLAS.

$g(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$

x	1	3	4	6
y	-7	5	8	14

Soruda

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_n)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$ L_1, L_2, L_3 aynı

4 yaz ↗ 4

SAYISAL TÜREV (Enterpolasyon başına türevleri)

İLERİ YÖN JON. F.

$$y' = \frac{1}{h}\left\{ \Delta y_0 + \frac{2p-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3p^2-6p+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4p^3-18p^2+22p-6}{4!}\Delta^4 y_0 \right\}$$ yeterli

GERİ YÖN

$$y' = \frac{1}{h}\left\{ \nabla y_0 + \frac{2p+1}{2!}\nabla^2 y_0 + \cdots \right.$$ Yukarıdakinin aynısı)

MERKEZİ YÖN

$$y_p' = \frac{1}{h}\left\{ \delta_{1/2} + \frac{2p-1}{2}\left(\frac{\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1}{2}\right) + \frac{3p^2-3p+1/2}{6}\cdot \delta^3 y_{1/2} \right\}$$

SONLU FARKLAR (Gregory-Newton Enter.)

İLERİ YÖN

$$y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\Delta y_0 + \frac{p.(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{p.(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$\boxed{p = \frac{x_p - x_0}{h}}$$ → tabloda x_p'nin satırının başı → aralık

GERİ YÖN

$$y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\nabla y_0 + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{p.(p+1)(p+2)}{3!}\nabla^3 y_0$$

Yine $p = \frac{x_p - x_0}{h}$

MERKEZİ YÖN

Bessel

$$y_p = \frac{y_0+y_1}{2} + \left(p-\frac{1}{2}\right)\delta_{1/2} + \frac{p(p-1)}{2!}\,\frac{(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1)}{2} +$$

$$\frac{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)}{3!}\,\delta^3 y_{1/2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\,\frac{(\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1)}{2} + \dots$$

Doğrusal Olmayan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.14 \\ -2.15 \end{bmatrix}$$

Eğer $\Delta x,\ \Delta y > \varepsilon$'dan

yeni değer $x_1 = x_0 + \Delta x$ olur

SONLU FARKLAR

1-) İleri yön sonlu farklar

Örnek

x	0	1	2	3	4	5
y	-7	-3	6	25	62	129

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-7	4	5	5	3	1
1	-3	9	10	8	4	
2	6	19	18	12		
3	25	37	30			
4	62	67				
5	129					

y değerleri için farklar alınır.

2-) Geri yön sonlu farklar

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
0	-7					
1	-3	4				
2	6	9	5			
3	25	19	10	5		
4	62	37	18	8	3	
5	129	67	30	12	4	1

3-) Merkezi yön sonlu farklar

x	y	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y_{1/2}$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y_{1/2}$
0	-7					
		4				
1	-3		5			
		9				
2	6		10	5		
		19		8	3	1
3	25		18		4	
		37		12		
4	62		30			
		67				
5	129					

Enterpolasyonlar

İleri yön sonlu farklar enterpolasyonu (Gregory-Newton)

$$\boxed{p = \frac{x_p - x_0}{h}}$$

x_p = soruda verilecek

$$\boxed{y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots}$$

Geri yön sonlu farklar enter.

$$\boxed{p = \frac{x_p - x_0}{h}}$$

$$\boxed{y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\nabla y_0 + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \dots}$$

Merkezi yön sonlu fark. ente.:

Bessel Bağıntısı

$$y_p = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(p - \frac{1}{2}\right)\delta y_{1/2} + \frac{p(p-1)}{2!}\cdot\frac{\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1}{2} +$$

$$\frac{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)}{3!}\,\delta^3 y_{1/2} + \dots \text{ gider.}$$

Lagrange enterpolasyonu: FİNAL

$$g(x) = \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{L_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)}}_{L_1(x)} y_1 + \dots$$

$$g(x) = L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1 + L_2(x)\,y_2$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots\dots(x_i-x_n)}$$

x'in aralıkları eşit değilse lagrange.